MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II BÜTÜNLEME SORULARI-CEVAPLARI

14.06.2020

1- $y''+ay'+y=0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y=e^{-x}$ olduğuna göre bu diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=c_1xe^{-x}+c_2x$
B) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$
C) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$
D) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}$
E) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{x}$

Cevap C- $y=e^{-x}$ çözüm olduğundan denklemi sağlar. Buna göre $y'=-e^{-x}$, $y''=e^{-x}$ olup denklemde yazılırsalar $e^{-x}-ae^{-x}+e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}(2-a)=0 \Rightarrow a=2$ dir. $\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1$ katlı kök olur. Buna göre de çözümler e^{-x} ve xe^{-x} şeklindedir. Genel çözüm C olur.

2- {x,1} fonksiyonlarını çözüm kabul eden ikinci mertebe diferansiyel denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y''=x$
B) $y''=2$
C) $y''=3x-2$
D) $y''=0$
E) $y''=-2$

Cevap D 1 ve x çözüm olduğundan $\lambda=0$ katlı köktür yani $\lambda^2=0 \Rightarrow y''=0$ bulunur.

3- $y^{(4)}+y'''=2x-1$ diferansiyel denkleminin özel çözümü nasıl aranır?

A) $y_ö=Ax^2+Bx+C$
B) $y_ö=Ax^4+Bx^3$
C) $y_ö=Ax^3+Bx^2$
D) $y_ö=Ax^2+Bx^4$
E) $y_ö=Ax+B$

Cevap B- $\lambda^4+\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=0,\ 3kök$, $\lambda=-1$ tek kök olup $y_h=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x}$ olur. $y_ö=Ax+B$ olarak aranır fakat homojendeki fonksiyonlar ile lineer bağımlı olduğu için $y_ö=Ax^4+Bx^3$ olarak aranmalıdır.

4- $ay''+by'+cy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$ ise $a+b+c=?$

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

Cevap C- 1 ve -3 kök oluğundan
$(\lambda-1)(\lambda+3)=0 \Rightarrow (\lambda^2+2\lambda-3)=0 \Rightarrow y''+2y'-3y=0$ bulunur. a=1, b=2, c=-3 olup cevap C olur.

5- $y''-2y'+y=2e^x x^{-2}$ denkleminin özel çözümü aşağıdakilerden hangisi ile aranır?

A) $y_ö=c_1e^x+c_2xe^x$

B) $y_ö=e^x(c_1x^2+c_2x+c_3)$

C) $y_ö=c_1(x)e^x+c_2(x)\dfrac{e^x}{x^2}$

D) $y_ö=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x$

E) $y_ö=c_1(x)\dfrac{e^x}{x}+c_2(x)\dfrac{e^x}{x^2}$

Cevap D- $\lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-1)=0 \Rightarrow y_h=c_1e^x+c_2xe^x$ olur. Özel çözüm parametrelerin değişimi yöntemi ile D şıkkına göre aranır.

6- Verilen denklem için yanındakilerden hangileri doğrudur?

$(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$

I. $x=0$ *adi noktadır*

II. $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *seri çözümü aranabilir*

III. $x=1$ *adi noktadır*

IV. $x=-1$ *düzgün singüler noktadır*

A) I-II-III

B) I-II-IV

C) I-II

D) III-IV

E) I-IV

Cevap B- Denklem düzenlenirse $y''+\dfrac{2x}{1-x^2}y'-\dfrac{2}{1-x^2}y=0$ olup $p_1(x), p_2(x)$ fonksiyonları 0 noktasında sürekli olup x=0 adi noktadır ve denklemin kuvvet seri çözümü aranabilir, I ve II doğru.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-1}(x+1)\dfrac{2x}{1-x^2}=-1\\ \lim_{x\to-1}(x+1)^2\dfrac{-2}{1-x^2}=0\end{array}\right\}$$

sonlu limitler olduğu için $x=-1$ düzgün singüler noktadır, IV doğru, benzer şekilde x= 1 de düzgün singüler noktadır.

7- $xy''-y'=x^2$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=c_1\dfrac{x^2}{2}+c_2+\ln x$

B) $y=c_1\dfrac{x^2}{2}+c_2+\dfrac{e^{3x}}{3}$

C) $y=c_1\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

D) $y=x^2+c_1x$

E) $y=c_1\dfrac{x^2}{2}+c_2+\dfrac{x^3}{3}$

Cevap E - $y'=u$ denirse $y''=u'$ olup denklemde yerlerine yazılıp düzenleme yapılırsa $u'-\dfrac{1}{x}u=x$ birinci mertebeden lineer denklemi elde edilir. $\lambda(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\dfrac{1}{x}$ olmak üzere lineer denklemin genel çözümü $\dfrac{1}{x}u=\int x\dfrac{1}{x}dx+c_1 \Rightarrow u=x^2+c_1x$ olur. $y'=u=x^2+c_1x \Rightarrow y=\dfrac{x^3}{3}+c_1\dfrac{x^2}{2}+c_2$ genel çözümdür. Veya denklem x ile çarpılırsa Cauchy-Euler denklemi olup onun çözüm yöntemiyle de çözülebilir.

8- $y''+2y'=\dfrac{1}{2}e^{-2x}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{-x}$

B) $y=c_1+c_2e^{-2x}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

C) $y=c_1+c_2e^{-2x}-\dfrac{x}{2}e^{-2x}$

D) $y=c_1+c_2e^{-2x}-\dfrac{x}{4}e^{-2x}$

E) $y=c_1+c_2e^{-2x}-e^{-2x}$

Cevap D- $\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2)=0 \Rightarrow y_h=c_1+c_2e^{-2x}$ olur. Özel çözüm belirsiz katsayılar yöntemi ile $y_ö=Ae^{-2x}$ olarak aranır fakat bu homojenin çözümü ile lineer bağımlı olup $y_ö=Axe^{-2x}$ olarak aranır ve A bulunur veya ters operatör yöntemi ile

$$y_{ö}=\frac{1}{D^2+2D}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{D(D+2)}\left(e^{-2x}\right)=-\frac{1}{4}\frac{1}{D+2}\left(e^{-2x}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}e^{-2x}\frac{1}{D-2+2}1=-\frac{1}{4}e^{-2x}\frac{1}{D}1=-\frac{1}{4}e^{-2x}x$$
olarak bulunur, genel çözüm $y=y_h+y_ö$ olur.

9- $x^3y'''+5x^2y''+3xy'=x^2\ln x$ denklemine $x=e^t$ dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen sabit katsayılı denklem hangisidir?

A) $y'''+2y''=te^{2t}$

B) $y'''+2y=t+e^t$

C) $y''-2y'=te^{2t}$

D) $y'''-2y'=te^{2t}$

E) $y'''+2y''=t^2e^t$

Cevap A- Denklem Cauchy-Euler denklemidir,

$x^3y'''=D_t\left(D_t-1\right)\left(D_t-2\right)y,\quad x^2y''=D_t\left(D_t-1\right)y,\quad xy'=D_ty$ olup denklemde yazılırsalar

$D_t\left(D_t-1\right)\left(D_t-2\right)y+5D_t\left(D_t-1\right)y+3D_ty=e^{2t}t \Rightarrow D_t(D_t^2+2D_t)y=te^{2t} \Rightarrow$ sabit katsayılı denklem

$(D_t^3+2D_t^2)y=te^{2t}\Rightarrow y'''+2y''=te^{2t}$

bulunur.

10- - Verilen denklem için yanındakilerden hangileri doğrudur?

$$e^xy''+\frac{y'-y}{x}=2y$$

I. 2. *mertebedendir*

II. 2. *derecedendir*

III. *Değişken katsayılıdır*

IV. *Homojendir*

A) I-II-III

B) I-III

C) I-IV

D) III-IV

E) I-III-IV

Cevap E- $xe^xy''+y'-y=2xy\Rightarrow \ xe^xy''+y'-(1+2x)y=0$, y'' türevden ötürü 2. mertebe ve 1. derecedendir, değişken katsayılıdır, y ve türevleri olmadan sadece x in fonksiyonu olmadığı için de homojendir.

Dr. Öğrt. Üyesi Fatma HIRA